

# FONKSİYONLAR

~51~

## Örnek

İlk bölümde sıralı ikili, kartezyen çarpım tanımları verilmiştir.

denir:

$$A = \{-1, 2, 3\} \quad B = \{-2, 2\} \quad \text{kümeleri için } A \times B, B \times A, A \times A$$

ve  $B \times B$  kartezyen çarpımlarını bulunuz.

$$A \times B = \{(-1, -2), (-1, 2), (2, -2), (2, 2), (3, -2), (3, 2)\}$$

$$B \times A = \{(-2, -1), (-2, 2), (-2, 3), (2, -1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$A \times A = \{(-1, -1), (-1, 2), (-1, 3), (2, -1), (2, 2), (2, 3), (3, -1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$B \times B = \{(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)\}$$

## Tanım:

$A, B$  boş olmayan iki küme olsun.  $A \times B$ 'nin her alt kümesine  $A$ 'dan  $B$ 'ye bir bağlantıdır denir. Buna kısaca "A'da bir bağlantıdır" denir.

$$f: A \rightarrow B, \quad f = \{(a, b) / a \in A, b \in B\} \subseteq A \times B$$

## Tanım:

$A$  ve  $B$  boş olmayan herhangi iki küme olsun.  $A$ 'nın her bir elemanına  $B$ 'nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren bir  $f: A \rightarrow B$  bağlantısına,  $A$ 'dan  $B$ 'ye bir fonksiyon denir.

$A$ 'dan  $B$ 'ye bir  $f$  fonksiyonu

$$f: A \rightarrow B, \quad x \mapsto f(x)$$

şeklinde gösterilir.  $A = \pi(f)$  kümesine  $f$  fonksiyonunun

birim kümesi,  $B$  kümesine değerler kümesi denir.

$f$  fonksiyonunun görüntü kümesi,  $A$ 'nın  $f$  altındaki görüntüsüdür.

$$f(A) = \{y / x \in A, \quad y = f(x) \in B\} \subseteq B$$

Bir  $f$  fonksiyonunun grafiği,  $(x, y)$  sıralı ikililerin kümesidir.

$$f = \{(x, y) / x \in A, y \in B, y = f(x)\}$$

$(x, y) \in f$  iken  $f: x \rightarrow y$  veya  $y = f(x)$  yazılır.  $y = f(x)$  yazılışında  $x$  elemanına bağımsız değişken,  $y$  elemanına da bağımlı değişken adı verilir.

tanım kümesinin her bir elemanına görüntü kümesinin bir tek elemanı karşılık getiren  $f$  kuralı açık olarak verilir.

Örneğin

$$f: A \rightarrow B, x \rightarrow f(x) = 3x - 4$$

ile verilen fonksiyonun kuralı "her sayıya 3 katının 4 eklenmesi" karşılık getirmektedir.

Tanım.

$A \subset \mathbb{R}$  ve  $B \subset \mathbb{R}$  olsun.  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonuna reel değerli reel değişkenli fonksiyon denir.

Tanım.

$A \subset \mathbb{R}$  kümesi üzerinde tanımlı reel değerli  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının toplam ve çarpım fonksiyonları

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

biçiminde tanımlanır.  $g(x) \neq 0$  iken  $f/g$  bölümü

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

dir. Bir  $c$  sabitiyle çarpım

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

ile tanımlanır.

ÖRNEK:

$f(x) = -2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 + 3x$  fonksiyonlarının toplam, fark ve çarpımını bulunuz.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -2x + 1 + x^2 + 3x = x^2 + x + 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) + (-g(x)) = -2x + 1 - x^2 - 3x = -x^2 - 5x + 1$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (-2x + 1)(x^2 + 3x) = -2x^3 - 6x^2 + x^2 + 3x = -2x^3 - 5x^2 + 3x$$

ÖRNEK:

Aşağıdaki verilen fonksiyonların tanım kümesini bulunuz.

a)  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

$$-x^2 + 2x + 3 = -(x+1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

$$T(f) = [-1, 3]$$

b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ için } x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3 > 0 \text{ olur. Tanım}$$

kümesi  $T(f) = \mathbb{R}$  dir.

Not:

$f(x) = 0$  denklemini sağlayan  $x_0$  sayısı için  $(x_0, 0)$  noktasına  $f$  fonksiyonunun sıfır yeri adı verilir.

Örneğin  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$  ise

$$x_1 = -1, x_2 = 3$$

dir. Buna göre verilen fonksiyonun sıfır yerleri  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$  noktalarıdır.

Fonksiyon Türleri

Not:

$A, B \subset \mathbb{R}$  olsun.  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonu için  $f(A) \subset B$  ise  $f$  ye  $B$  içine fonksiyon denir. Bu durumda  $B$  deger kümesinde en az bir eleman ağırlıkta kalır.



Tanım

$f: A \rightarrow B$  fonksiyonu  $\text{ran } f(A) = B$  ise,  $f$  ye örten fonksiyon denir. Her  $y \in B$  için  $y = f(x)$  olmak üzere en az bir  $x \in A$  varsa,  $f$  örten dir. Eğer  $f$  fonksiyonu örten değil ise  $f$  -ye örten fonksiyon denir.

Örnek

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x) = x^2$  örten değil,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, h(x) = x^2$  örten.

a)  $f: A \rightarrow B$  olsun. Birim kümesinin farklı elemanlarının görüntüleri farklı ise,  $f$  fonksiyonuna 1-1 fonksiyon denir.

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ için } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

veya

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ için } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

oluyorsa  $f$ , 1-1 dir.

b-) Hem 1-1 hem de örten fonksiyon birbiriyle farklıdır.

Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x) = 3x - 4$  1-1 ve örten midir?

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  ve  $x_1 \neq x_2$  olsun

$$3x_1 \neq 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 4 \neq 3x_2 - 4 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ olur. veya}$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  olsun.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 4 = 3x_2 - 4 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ bulunur.}$$

1-1 dir.

Verilen her  $y \in \mathbb{R}$  için  $y = 3x - 4 \Rightarrow \frac{y+4}{3} = x \in \mathbb{R}$  sayısı vardır.  $f$  örten dir.

Örnek

$f: A \rightarrow A$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in A$  için  $f(x) = x$  ise,  $f$  fonksiyonuna birim fonksiyon denir. I ile göst.

## Tanım

$A, B, C$  herhangi üç küme ve  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  olsun.

Her  $a \in A$  için  $f: a \rightarrow f(a) = b \in B$  ve  $\forall b \in B$  için  $b \rightarrow g(b) = c \in C$  vardır. Her  $a \in A$  için  $a \rightarrow g(f(a)) \in C$

biçiminde tek tırku tanımların forkları,  $g$  ile  $f$  forklarıyla bileşkesi denir.  $g \circ f$  yazılır, göst.

$$g \circ f: A \rightarrow C, a \rightarrow (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

## ÖRNEK:

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$  ve  $g(x) = x^2 - 1$  forkları bileşkesini bulunuz.

$$g \circ f = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 - 1 = 4x^2 - 12x + 8$$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) - 3 = 2x^2 - 5$$

$f \circ g \neq g \circ f$  dir.

## ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{1}{2x - 3}$$

$$g(x) = \sqrt{x - 2}$$

forklarıyla  $f \circ g$  bileşkesi

forkları tanımlarını bulunuz.

$$T(f) = \mathbb{R} - \{3/2\}$$

$$T(g) = \{x / x \geq 2\} = [2, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x - 2}) = \frac{1}{2\sqrt{x - 2} - 3} = \frac{1}{4x - 17}$$

$$T(f \circ g) = \{x / x \neq 17/4\} \cap \{2\sqrt{x - 2} - 3 \neq 0 \quad x - 2 \geq 0\}$$

$$T(f \circ g) = \{x / x \geq 2, x \neq 17/4\}$$

## ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$$

forklarıyla  $f \circ g$  bileşkesi

forkları ve tanımlarını bulunuz.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right) = \frac{\frac{1}{x^2 + 2} - 2}{\frac{1}{x^2 + 2} + 1} = -\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 3}$$

$$T(f \circ g) = \mathbb{R}.$$

Tanım:

$f$  birebir ve örten bir fonksiyon olsun.  $(g \circ f)(x) = x$  ve  $(f \circ g)(y) = y$  eşitliklerini sağlayan  $g$  fonksiyonuna  $f$ 'nin tersi denir ve  $f^{-1}$  ile gösterilir.

$f: A \rightarrow B$  1-1 ve örten ise  $f^{-1}$ ,  $B$  den  $A$  ya bir fonksiyondur.

$$f = \{(x, y) / y = f(x)\} \text{ ise } f^{-1} = \{(y, x) / y = f(x)\}$$

$y = f(x)$  fonksiyonunun tersi varsa, ters fonksiyon iki adımda bulunur.

1. Adım  $y = f(x)$  den  $x = g(y)$  bulunur.

2. Adım  $x$  ile  $y$  yer değiştirilir.  $y = g(x) = f^{-1}(x)$

Örnek:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} \text{ fonk. tersi?}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad T(f) = \{x / x \neq 0\} \text{ tanım kümesinde}$$

$$1-1 \text{ dir: } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1} = \frac{2x_2+1}{x_2} \Rightarrow x_2(2x_1+1) = x_1(2x_2+1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 + x_2 = 2x_1x_2 + x_1 \quad (x_1, x_2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{örneğin: } y \in \mathbb{R} \text{ iken } y = \frac{2x+1}{x} \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = y-2 \Rightarrow x = \frac{1}{y-2} \in \mathbb{R}$$

vardır. ( $y \neq 2$ )

$$\text{förs} \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x-2} \text{ ters fonksiyonu}$$

$$T(f^{-1}) = \{x / x \neq 2\} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$f(x) = \frac{2}{1-x}$$

$$f(x) \text{ fonksiyonu } T(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} \text{ tanım kümesinde 1-1}$$

ve örten olduğundan, tersi vardır.

$$f^{-1}(x) = 1 - \frac{2}{x} \text{ ters fonksiyonu } \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \text{ kümesinde tanımlıdır.}$$

266  
Ali Erdem



### Tanım:

a)  $f: A \rightarrow B$  olsun.  $\forall x_1, x_2 \in A$  ağıftı isen  $f(x_1) = f(x_2)$  ise  $f$  ye

Sabit fonksiyon denir.

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olsun.

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$$

benimde tanımlanan  $|f|$  fonksiyonuna  $f$ -nin mutlak değeri fonksiyonu denir.

c)  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  olsun.

$$\text{sign}(f(x)) = \text{sgn}(f(x)) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x) \neq 0 \\ 0, & f(x) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$

benimde tanımlanan fonksiyona işaret fonksiyonu veya signum fonksiyonu denir.

d)  $f: A \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}$  fonksiyonu  
 $[x] \rightarrow f(x) = \lfloor \tilde{x} \rfloor = \begin{cases} x^-, & x \in \mathbb{H} \text{ ise} \\ x \text{ den küçük} \\ \text{en büyük} \\ \text{tam sayı} \end{cases} \quad x \notin \mathbb{H} \text{ ise}$

benimde tanımlanan fonksiyona tam değeri fonksiyonu (basamak fonksiyonu) denir.

### ARTAN ve AZALAN FONKSİYONLAR

#### Tanım:

Reel değerli, bir  $f$  fonksiyonunun değerler kümesi üstten (alttan) sınırlı ise  $f$ -ye üstten (alttan) sınırlıdır denir. Hem alttan hem de üstten sınırlı olan  $f$  fonksiyonuna sınırlıdır denir.

### Tanımı:

$f: A \rightarrow B$  ,  $a, b \in A$  ve  $a < b$  olsun.  $\forall a, b \in A$  için

$a < b$  iken  $f(a) < f(b)$  ise  $f$ -ye artan fonk.

$a < b$  iken  $f(a) \leq f(b)$  ise  $f$ -ye azalmayan fonksiyon

$a < b$  iken  $f(a) > f(b)$  ise  $f$ -ye azalan fonksiyon,

$a < b$  iken  $f(a) \geq f(b)$  ise  $f$ -ye artmayan fonksiyon denir.

Artan yada azalan fonksiyonlara monoton fonksiyon denir.

### Teoremi:

$f$  fonksiyonu  $A = [a, b]$  kapalı aralığı üzerinde monoton ise  $f^{-1}$  ters fonksiyonu  $f(A)$  üzerinde monotondur.

### ÖRNEK:

$f(x) = 3x - 2$  fonksiyonunu ve  $f^{-1}(x)$  fonk. inceleyiniz.

$x_1 < x_2$  olsun.

$$3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 2 < 3x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ artandır.}$$

$f$  1-1 ve örtendir. O halde tersi vardır.

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x+2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \Rightarrow 3(x_1 + 2) < 3(x_2 + 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(x_1 + 2) < \frac{1}{3}(x_2 + 2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$$

$f^{-1}$  artandır.



## En Geniş Tanım Analizi

### Tanım:

$x \in \mathbb{R}$  o.ü.  $y = f(x)$  reel değerli bir fonksiyonda  $f(x) \in \mathbb{R}$  koşulunu gerçekleyen  $x \in \mathbb{R}$  sayılarının oluşturduğu kümeye  $f$  fonksiyonunun en geniş tanım aralığı denir.

Örneğin  $f(x) = 3x - 2$  fonksiyonu için  $T(f) = \mathbb{R}$ .

$p(x), q(x) \in \mathbb{R}$  o.ü.

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  biçimindeki kesirli fonksiyonların tanım aralığı ise

$q(x) \neq 0$  koşulunu gerçekleyen reel sayı kümesidir.

$\sqrt[n]{g(x)}$  biçiminde verilen fonksiyonun tanım kümesi  $g(x) \geq 0$  koşulunu gerçekleyen  $x \in \mathbb{R}$  kümesidir.

$\sqrt[n]{g(x)}$  biçiminde verilen fonksiyonların en geniş tanım kümesi ise  $g(x)$ 'in tanımlı olduğu reel sayılar kümesidir.

Tek ve çift fonksiyon:

### Tanım:

$\forall x \in A \subset \mathbb{R}$  için  $-x \in A$  dır. (Bu durumda  $A$ ye simetrik küme adı verilir.)  $\forall x \in A$  için

$f(-x) = f(x)$  oluyorsa,  $f$ ye çift fonksiyon

$f(-x) = -f(x)$  oluyorsa  $f$ ye tek fonksiyon denir.

Örneğin  $f(x) = x^2 - 1$

$f(x) = x^3 + x$

Uyarı: Reel değerli bir fonksiyon tek yada çift olmak zorunda değildir.

$f(x) = 2x - 1$

ne tek ne çift

$g(x) = 0$

hem çift hem tek

ÖRNEK:

~60~

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  ve  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  ve  $C = \{0, 1, 4\}$  için

$$f: A \rightarrow B, f(x) = x^2 + 1$$

$$g: A \rightarrow B, g(x) = x + 2$$

$$h: A \rightarrow C, h(x) = x^2$$

başta tanımlanan  $f, g, h$  fonksiyonlarını detaylıca aldım.

$f$ , 1-1 değildir.  $f(-2) = 5 = f(2)$

$f$ , örten değildir.  $3 \in B$  için  $f(x) = 3$  olacak şekilde  $x \in A$  yoktur.

$f(A) = \{1, 2, 5\} \subset B$  olduğundan  $f$  içinedir.

$g$ , 1-1 fonksiyondur.

$g$ , örten değildir.  $5 \in B$  için  $g(x) = 5$  o.s.  $x \in A$  yoktur.

$\Rightarrow g$ , 1-1 ve içinedir.

$h$ , 1-1 değildir.  $h(-1) = 1 = h(1)$

$h(A) = \{4, 1, 0\} = C$  olduğundan  $h$  örtenidir.